Работа 5. Решение задачи Коши одношаговыми методами

Метод Эйлера-Коши

**Формулировка задачи.** Решить задачу Коши для ОДУ методом Эйлера-Коши с заданной точностью. Использовать правило Рунге для оценки погрешности.

**Метод Эйлера-Коши –** усовершенствованный метод Эйлера

**Правило Рунге для оценки точности численного решения ОДУ**

**Этапы решения**

1. Разбиваем промежуток на отрезки с заданным шагом (или задаем количество n отрезков и считаем шаг как (b-a)/n
2. Для каждой точки последовательно находим решение задачи Коши (то есть вычисляем значение у’ для заданного начального условия)

**Алгоритм метода**

1. Задать начальное условие у(а), промежуток а..б, шаг разбиения h = 0.1, i=0, эпсилон – точность
2. Задать начальное количество отрезков для отрезка рассмотрения [a+i\*h, a+(i+1)\*h] n = 1
3. Вычислить решение задачи коши в точке х\_k=х\_(k-1)+h с количеством отрезков n
4. Увеличиваем n в два раза, снова ищем решение задачи Коши с шагом в два раза меньше
5. Считаем модуль разности результатов пунктов 3 и 4 (применяем правило Рунге). Если оно оказывается больше заданного эпсилон, повторяем пункты 3 и 4, пока модуль разности не станет меньше эпсилон.
6. Увеличиваем i на единицу, переходим к пункту 2. Выполняем пункты 3, 4 и 5 для следующего отрезка. Последняя итерация выполнится тогда, когда a+(i+1)\*h = b.

**Предварительный анализ решения задачи**

Анализируем функцию, которую взяли – не имеет разрывов, интегрируема (????) + пишем известное точное решение

**Тестовый пример (у Ксюши)**

**Перечень контрольных тестов**

Было найдено решение задачи Коши для диф. ур-ия … на промежутке… С начальным условием…  
Вносились возмущения начальных условий порядка 1%. Точность менялась от … до …

Исследовать изменения в решении при внесении возмущения начального условия разных порядков (от 1% до 10^-8%).

**Модульная структура программы**

**Численный анализ решения задачи –** таблицы и графики

**Вывод**Чем меньше шаг дробления отрезка, тем точнее вычисляется решение задачи Коши, однако увеличивается время вычислений. Метод Эйлера-Коши легко программируется, но производится большой объем вычислений и довольно трудно достичь высокой точности (для небольшой точности eps метод является эффективным).

К тому же, метод Эйлера-Коши является устойчивым: изменения в начальном условии порядка 1% (10^-2 – в долях) дал погрешность того же порядка.

Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, в которых решения получаются от одного узла к другому, называются пошаговыми. Метод Эйлера самый простой представитель пошаговых методов. Особенностью любого пошагового метода является то, что начиная со второго шага исходное значение у\_i в формуле https://works.doklad.ru/images/CCpVvppyaYA/m56138f4.gif само является приближенным, то есть погрешность на каждом следующем шаге систематически возрастает.

Этот метод имеет второй порядок точности (погрешность на шаге – O(h^3), погрешность в целом – O(h^2), т.к. погрешности суммируются). Благодаря более точной формуле интегрирования, погрешность метода пропорциональна уже квадрату шага интегрирования. E(h) = ch^2.

Возмущение вносится следующим образом: (l+1)\*у начальное

Фактическая точность при изменениях заданной от 10 в -1 до 10 в -10 получалась на порядок выше.  
Максимальное и минимальное количество разбиений не сильно разнятся до точности 10 в -6 включительно (оба значения меньше 100), с увеличением точности растет разница между значениями макс и мин разбиений.   
Внесение возмущений в начальном условии одного порядка дает фактическую погрешность того же порядка (исследовались возмущения от 10 -2 до 10 в -10 в долях), то есть метод является устойчивым.